Verschränkte Spin-Zustände

In dem quantenmechanischen Phänomen der Verschränkung zeigt sich vielleicht, dass die Verbindungen der Teilchen untereinander noch nicht richtig gedeutet werden. Zum einen ist beispielweise nicht klar, warum Elementarteilchen überhaupt einen Spin haben und zum anderen, warum sich eine körnige Raum-Struktur auch bei extrem weit entfernten Gammastrahlen-Ausbrüchen nicht nachweisen lässt.

Zunächst sollen nur die bekannten Herleitungen zur Verschränkung aufgezeigt werden, um dann im weiteren Überlegungen zum Spin und dem Raum selber anzustellen.

$\mathcal{H}^1$und $\mathcal{H}^2$seien zwei voneinander unabhängige Hilbert Räume mit den Basisvektoren $\left(\left|\psi_m^1\right\rangle\right)$ und $\left(\left|\psi_n^2\right\rangle\right)$. Dazu wird für alle Vektorpaare das direkte Produkt $\left|\psi_m^1\right\rangle \otimes \left|\psi_n^2\right\rangle$ erklärt, oder kurz $\left|\psi_m^1\right\rangle\left|\psi_n^2\right\rangle$. Jedem der Paare soll eindeutig ein Vektor $\left|\psi_m^1\psi_n^2\right\rangle$ eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ zugeordnet werden, der von den Vektoren vollständig aufgespannt wird.

$$\left|\psi_m^1\psi_n^2\right\rangle = \left|\psi_m^1\right\rangle\left|\psi_n^2\right\rangle = \left|\psi_n^2\right\rangle\left|\psi_m^1\right\rangle$$

$\left|\psi_m^1\psi_n^2\right\rangle$bildet also eine Basis des direkten Produktraums zweier Hilbert-Räume.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^1$, so kann jeder Vektor $\left|\psi^{12}\right\rangle \in \mathcal{H}$ als Linearkombination von $\left|\psi^{12}\right\rangle = \sum_{m,n}\int c_{nm}\left|\psi^1\right\rangle\left|\psi^2\right\rangle$ (1) dargestellt werden.

Außerdem soll das direkte Produkt der Vektoren $\left|\psi^1\right\rangle = \sum_{m,n}\int a_m\left|\psi_m^1\right\rangle \in \mathcal{H}_1$ und

$\left|\psi^2\right\rangle = \sum_{m,n}\int b_n\left|\psi_n^2\right\rangle \in \mathcal{H}_2$ (2) durch

$\left|\psi^{12}\right\rangle = \left|\psi^1\right\rangle\left|\psi^2\right\rangle = \sum_{m,n}\int a_m b_n\left|\psi_m^1\right\rangle\left|\psi_n^2\right\rangle \in \mathcal{H}$ gegeben sein.

(Das Integral steht für kontinuierliche Anteile)

Im Produktraum $\mathscr{H}$ wird ein Skalarprodukt erklärt, das für $\left|\psi^{12}\right\rangle = \sum_{m,n}\int c_{nm}\left|\psi_m^1\right\rangle\left|\psi_n^2\right\rangle$ und $\left|\chi^{12}\right\rangle = \sum_{r,s}\int d_{rs}\left|\psi_r^1\right\rangle\left|\psi_s^2\right\rangle$

durch $\left\langle\chi^{12}\middle|\psi^{12}\right\rangle = \sum_{m,n,r,s}\int c_{mn}d_{rs}^*\left\langle\psi_r^1\middle|\psi_m^1\right\rangle\left\langle\psi_s^2\middle|\psi_n^2\right\rangle = \sum_{m.n}\int c_{mn}d_{mn}^*$ (3) gegeben ist.

Nun gilt für separierbare Elemente $\left|\psi^{12}\right\rangle = \left|\psi^1\right\rangle\left|\psi^2\right\rangle$ und $\left|\chi^{12}\right\rangle = \left|\chi^1\right\rangle\left|\chi^2\right\rangle$ nach (2)

$\left|\chi^1\right\rangle\sum_r\int f_r\left|\psi_r^1\right\rangle$ und $\left|\chi^2\right\rangle\sum_s\int g_s\left|\psi_s^2\right\rangle$ es folgt

$\left\langle\chi^{12}\middle|\psi^{12}\right\rangle = \left\langle\chi^1\middle|\psi^1\right\rangle\left\langle\chi^2\middle|\psi^2\right\rangle$

dann gilt $c_{mn} = a_m b_n$ und $d_{rs} = f_r g_s$ $\left\langle\chi^1\middle|\psi^1\right\rangle\sum_{m,r}\int a_m f_r^*\left\langle\psi_r^1\middle|\psi_m^1\right\rangle = \sum_m\int a_m f_m^*$

$\left\langle\chi^2\middle|\psi^2\right\rangle = \sum_n\int b_n g_n^*$ und mit (3) folgt

$\left\langle\chi^{12}\middle|\psi^{12}\right\rangle = \sum_{mn}\int a_m b_n f_m^* g_n^* = (\sum_m\int a_m f_m^*)(\sum_n\int b_n g_n^*)$

Zu den Zuständen von (1) gehören aber auch solche, die nicht als Produkt separabel sind und als verschränkter Zustand bezeichnet werden. Zum Separieren müssten sich die Koeffizienten c_{mn} der Produkte in $c_{mn} = a_m b_n$ zerlegen lassen. Aus der linearen Abhängigkeit der Zeilen der Matrix $M_{mn} := a_m b_n$ folgt jedoch $\det(c_{mn}) = 0$ und die c_{mn} können so gewählt werden, dass diese Bedingung nicht erfüllt wird.

Die Basis der Zustände von Spin-1/2-Teilchen wird als Produkt von Orts- und Spin-Zuständen $\psi(x,s) = \psi(x)u(s)$ mit $u(s) = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ gebildet.

Zwei-Teilchen Zustände sind dann $\psi_1(x_1,s_1)\psi_2(x_2,s_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)u_1(s_1)u_2(s_2)$.

Der allgemeine Zustand ist eine Superposition solcher Produktzustände.

Als Basis der Ein-Teilchen-Zustände nehmen wir die Eigenzustände $u_+ = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$,

$u_- = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

Eine Basis der Zwei-Teilchen-Spinzustände bilden dann die Zustände

$$u_{1+}u_{2+},\quad u_{1+}u_{2-},\quad u_{1-}u_{2+},\quad u_{1-}u_{2-}.$$

Der allgemeinste Spin-Zustand lässt sich aus den Basiszuständen superponieren. Der Spin-Zustand σ des Gesamtsystems ist bis auf den Faktor $\hbar/2$ durch $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ definiert.

Für die symmetrische und die antisymmetrische Superposition gilt

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_{1+}u_{2-} + u_{1-}u_{2+}\right];\ \psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_{1+}u_{2-} - u_{1-}u_{2+}\right].\quad (4)$$

Beide sind ein gemeinsamer Eigenzustand der beiden Operatoren σ^2 und σ_z .

Es gilt $\sigma^2\psi_a = 0$, $\sigma_z\psi_a = 0$, $\sigma^2\psi_s = 8\psi_s$, $\sigma_z\psi_s = 0$.

$\sigma^2\psi_s = 8\psi_s$ bedeutet

$$S^2\psi_s = \frac{\hbar^2}{4}\sigma^2\psi_s = 2\hbar^2\psi_s = \hbar^2 s(s+1)\psi_s$$

mit einem Gesamtspin von s=1 für ψ_a ergibt sich s=0 und die beiden Zustände ψ_s und ψ_a sind nicht faktorisierbar also verschränkt. Sie lassen sich damit als Produkt eines Ein-Teilchen Zustands beschreiben.

Aus (4) ergibt sich $u_{1+}u_{2-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_s + \psi_a\right)$, $u_{1-}u_{2+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_s - \psi_a\right)$ und somit

$$\sigma^2 u_{1+}u_{2-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^2\psi_s + \sigma^2\psi_s) = \frac{8}{\sqrt{2}}\psi_s = \sigma^2 u_{1-}u_{2+}.$$

Eine Messung von σ^2 bedeutet, dass zu den Eigenzuständen ψ_s und ψ_a die beiden Eigenwerte 8 und 0 superponiert sind. Da auch ihre Amplituden gleich groß sind müssen deren Eigenwerte oder der Gesamtspin 1 oder 0 mit der gleiche 50% Wahrscheinlichkeit angetroffen werden.

Dies bedeutet nun, dass wenn wir an einem Teilchen 1, das sich nach links bewegt die Spin Komponente σ_{1z} messen, so findet man zu 50% Wahrscheinlichkeit den Eigenwert +1. Nach der Messung befindet sich das System im Zustand $u_{1+}u_{2-}$ mit der Eigenschaft $\sigma^2 u_{1+}u_{2-} = u_{1+}u_{2-}$.

Zudem gilt $\sigma_{2z}u_{1+}u_{2-} = -u_{1+}u_{2-}$, also hat das zweite Teilchen den Eigenwert -1.

In den restlichen 50% der Fälle hat das 1. Teilchen den Eigenwert -1 und das 2. Teilchen den Eigenwert +1.

Dies gilt unabhängig von ihren Entfernungen.

Nach der Kopenhagener Deutung macht es solange keinen Sinn irgendeine Eigenschaft eines Teilchens festzulegen, solange keine Messung an ihm vorgenommen wurde. Die beiden Teilchen werden solange als untrennbare Einheit $\psi_a = \left[u_{1+}u_{2-} - u_{1-}u_{2+}\right] / \sqrt{2}$ aufgefasst, wie keine Messung vorgenommen wird. Im Moment der Messung am 1. Teilchen gibt es eine von der Entfernung unabhängige instantane Wirkung auf das 2. Teilchen.

Dieses bemerkenswerte Ergebnis steht nicht im Widerspruch zur Relativitätstheorie und zwar nicht weil der Determinismus verletzt sein könnte, sondern weil dies genau die eigentliche Bedeutung einer Informationsübertragung mit Lichtgeschwindigkeit ist. Ein Quant, dass sich mit c in unserem Materie-Raum-Zeit Bild bewegt muss nach unseren Vorstellungen eine Position zu einem bestimmten Zeitpunkt haben. Dies ist die Sichtweise aus unserem ruhenden System. Für das Quant jedoch bleibt die Zeit stehen und der Raum in Bewegungsrichtung verschwindet. Anfang und Ende sind instantan. Jede Messung bedeutet eine Festlegung des Quants zurück in unsere Raum-Zeit. Ein Quant mitten in seiner Bewegung kann nicht gemessen oder festgelegt werden, weil es für das Quant ein Dazwischen nicht gibt.

Bei der Verschränkung des Spin ½ Quants wird genau diese Eigenschaft aller sich mit c bewegenden Teilchen deutlich. Es gibt für uns eine abzählbare räumliche Größe, welche jedoch von unserem Zeitablauf bestimmt wird. Der Raum scheint dann körnig zu sein, - allerding von so kleiner Struktur, dass es schon fast wieder gleichgültig ist. Dennoch haben sehr genaue Experimente über extrem große Entfernungen gezeigt, dass keinerlei Dispersion zu erkennen ist, was bei einer Körnung im Bereich der Planklänge, für Gammastrahlenausbrüche über extrem weite Entfernungen, zu erwarten gewesen wäre. Der Raum muss also nicht eine eigenständige Struktur haben, er kann auch nur für unsere ruhende Welt Realität besitzen.

Die meisten Verbindungen der Teilchen untereinander laufen über Bosonen und damit in einer vorübergehenden zeitlosen Welt. Auch verschränkte Teilchen sind in ihren Quanteneigenschaften so lange unbestimmt, wie sie nicht gemessen werden. Erst durch die Messung stehen sie mit unserer Welt wieder in Verbindung und lösen sich gleichzeitig vom 2. Partnerteilchen.

Die Idee ist nun, dass sich die Verschränkung nicht komplett löscht, sondern dass der überlagerte Zustand auf einen jeweiligen winzigen Kontakt-Zeitpunkt reduziert ist. Bei einem elektrischen oder einem gravitativen Austausch liegen die beiden Teilchen kurzzeitig miteinander in einem überlagerten Ein-Teilchen-Zustand vor, der unabhängig von der Entfernung ist. Anfang und Ende sind für einen kurzen Moment für $t_0 = 1 \cdot 10^{-23} s$ räumlich und zeitlich unbestimmt. Trotzdem bleibt der Schwerpunkt bis auf eine kleine Unschärfe im wesentlichem am selben Ort erhalten, da die träge Position im statistischen Mittel isotrop zu anderen Teilchen verteilt ist.

Dies gilt nicht unbedingt für den Spin. Im Weiteren soll nun gezeigt werden, dass der intrinsische Spin des Elektrons oder des Protons sich mit einer durchgehenden Verschränkung beider Teilchen erklären ließe.

In einem inhomogenen Magnetfeld wird, wie im Stern-Gerlach Versuch gezeigt, ein Atomstrahl durch sein magnetisches Moment μ mit der Kraft $F = \nabla(\mu \cdot B)$ abgelenkt. Quantenmechanisch sieht die entsprechende Operatorgleichung so aus $\hat{\mu} = \frac{q}{2m}\hat{L}$, $\hat{L}$ ist darin der Drehimpulsoperator des Elektrons auf seiner Bahn.

Die Eigenwerte μ^2 liefern das Quadrat des magnetischen Moments. Mit

$\hat{L}\psi = \hbar l(l+1)\psi$ erhält man $\hat{\mu}^2\psi = \left(\frac{q}{2m}\right)^2 \hat{L}^2\psi = \left(\frac{q\hbar}{2m}\right)^2 l(l+1)\psi = \mu^2\psi$

$\Rightarrow \mu^2 = \left(\frac{q\hbar}{2m}\right)^2 l(l+1)$ Nun zeigt sich das auch im Grundzustand des Wasserstoffs, l=0 zwar $\mu = 0$ gilt, jedes Elektron aber dennoch einen intrinsischen Drehimpuls mit dem magnetischen Moment μ_s hat, der als Spin bezeichnet wird. Dieser Spin und sein zugehöriger Spin Operator $\hat{S}$ besitzen die gleichen Eigenschaften wie ein Drehimpulsoperator. Seine Eigenwerte zur Komponente s_z besitzt die Werte $\hbar m_s$ mit $m_s = -s, -s+1...., s-1, s$ und dem Wert s=1/2.

Folgende Eigenschaften gelten für den Elektronenspin. Der Spin-Operator ist hermitesch und erfüllt die Vertauschungsregeln $\left[S_i, S_k\right] = i\hbar S_l$ i, k, l zyklisch. Der Spin beträgt den Wert ½ und der Spinraum wird durch genau zwei linear unabhängige Zustände $|s\rangle$ aufgespannt ($|\uparrow\rangle;|\downarrow\rangle$). Der vollständige Zustand wird durch Vektoren aus dem Produktraum $\mathscr{H}=\mathscr{H}^{x}\otimes\mathscr{H}^{\mathscr{S}}$ beschrieben. Mit S ist ein magnetisches Moment μ verbunden und für die Bewegung mit Spin gilt die Hamilton-Gleichung

$$H = H_0 - \frac{g_s q}{2m} B \cdot S\,.$$

Damit ist die allgemeine quantenmechanische Bewegungsgleichung im Schrödinger-Bild mit Spin-Teilchen

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = H_0|\psi\rangle - \frac{g_s q}{2m} B \cdot S|\psi\rangle$$

Die Komponenten zu jedem Zustand $|\psi\rangle$ sind die Pauli-Spinoren

$\psi_+(x,t) = \left\langle x,\frac{1}{2}\middle|\psi\right\rangle \quad \psi_-(x,t) = \left\langle x,-\frac{1}{2}\middle|\psi\right\rangle$ und die entsprechenden adjungierten Spinoren

$\psi^*_+(x,t); \quad \psi^*_-(x,t)$.

$\hat{S}$ verhält sich wie ein Drehimpulsoperator. Die mit der Rotation verbundene Bewegung der elektrischen Ladung des Elektrons, erzeugt dabei das magnetische Moment des Elektrons selber. Dies würde aber bedeuten, dass das Elektron eine endliche Ausdehnung hat, die dem Elektron nicht zwangsläufig zugewiesen ist. Eine Besonderheit bei der Deutung des Spins als Drehung des Elektrons selber ist, dass die Eigenwerte von S_z nur die Werte $s = \pm\hbar/2$ aufweisen. Zudem ist nicht klar warum sich die Elektronen überhaupt drehen. Da man dem Elektron nicht zwangsläufig eine Größe geben will und der Spin genau einen halben Drehimpuls als Eigenwert hat, ist man zurückhaltend, den Spin ganz mit einem Drehimpuls zu vergleichen und versteht ihn im Allgemeinen als eigenen quantenmechanischen Zustand.

Nehmen wir trotzdem an, das Elektron besitze nach unserem Bild eine Struktur aus zwei Ebenen der Größe R_e^2, die sich klassisch mit $R_e/2$ um seinen Schwerpunkt mit seiner Masse M_e und einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega_o = 2\pi f_0$ ($f_0 = 1/t_0$) drehe, dann folgt daraus für den klassischen Drehimpuls die Größe $L_z \approx 2{,}6 \cdot 10^{-36}\,Js$, was in etwa ein um den Faktor 80 zu kleiner Wert ist, um mit unserer Raumdrehung in Verbindung gebracht werden zu können.

In unserem Bild nehmen das Elektron und das Proton aber eindeutig vier verschiedenen zyklische Raumstellungen und entsprechende Verbindungen an. In unserem Raum-Zeit Bild müsste sich somit daraus ein Massen-Drehimpuls ergeben. Der Spin steht danach für eine Bewegung, die sich verglichen mit einer Translationsbewegung, mit Lichtgeschwindigkeit dreht oder einem zeitlichen hintereinander Ablauf, der mit unseren minimalen Zeitpulsen t_0 abläuft. Damit darf die Spin-Rotation nicht träge sein, was bei einem Ablauf von Verbindungen denkbar wäre. Die Ebenen selber werden bei diesem Bild nicht als Sitz der Masse angesehen, sondern nur der Abstand der Ebenen sagt etwas, als Bezugsgröße, über die Masse aus. Die Bewegungen der Ebenen im Raum, im Kontakt zu anderen Teilchen geschehen verzögert, hier hängt die Veränderung der Bewegung von der jeweiligen Entfernung zu den Teilchen ab. Die Drehung um den Schwerpunkt selber hat nur Bedeutung für einen einzigen Gegenspieler, dem mit den es Kontakt hat und dies lässt sich zum einen als kurzzeitige Verschränkung deuten, als auch klassisch als eine Drehung von zwei nicht getrennten Teilchen, dem Elektron und dem zugehörigen Proton.

So gesehen macht es Sinn, dass der Spin nicht angehalten oder verbraucht werden kann sondern einen immer gleich großen, festen Wert hat. Er ergibt sich aus den wechselnden kurzfristigen Verbindungen zu einem Ganzen und hat nicht die gleiche Bedeutung wie der Drehimpulsoperator $\hat{L}$, der sich in unserem Raum bewegt und veränderbar ist.

Vielleicht bleibt der Quantenzustand des Spins verschränkt und wir schließen nur indirekt über sein magnetisches Moment μ_S auf seine Größe und seine Richtung und schließen daraus auf die Spin Größe von $\hbar/2$. Sehen wir die Rotation des Elektrons und des Protons jedoch weiter als überlagert, dann fällt der Spin ½ Zustand weg und bezogen auf einen Radius von $R_e/2$ könnten wir der Rotation einen klassischen Drehimpuls für beide Massen geometrisch gemittelt ($\sqrt{m_e m_P}$) zuordnen, die dann bei unserer vorgegebenen festen Austauschzeit t_0 genau zu einem $\hbar/2$ Ergebnis führt.

Sowohl das Proton als auch das Elektron haben dann Beide den gleichen Spin, der sich als Messung für uns wie $\hbar/2$ darstellt. Danach tauschen sich die

Teilchen mit t_0 permanent aus, sie wechseln zwischen trägen unbestimmten und elektrisch bestimmten Verbindungen. Diese Verbindungen verlaufen aus Sicht der Austauschteilchen zeitlos und aus unserer Sicht zeigen Sie sich in ihrem magnetischen Moment. Messen wir das Moment, dann zwingen wir das Elektron, sich für die Messung vom Proton zu lösen. Damit erhalten wir einen Wert, der auf unsere Welt positioniert und statistisch halbiert wird.

Auch die extrem präzise Ladungsneutralität von Elektron und Proton kann mit Hilfe der Verschränkung Sinn machen. Wir geben dem Elektron eine Position auf einer inneren stabilen Lage um ein Proton herum, das durch die vielen Verbindungen zu anderen Teilchen (gravitativ) nicht mehr im Kern, sondern im Unschärfebereich von $\hbar$ liegt. Und doch sind im neutralen Atom die Ladungen auf einander bezogen und äußerlich nicht messbar. Ein elektrisch ungeladenes Atom, das nicht vermessen wird, ist wie ein gemeinsamer überlagerter Zustand, bei dem die exakte Position uneindeutig oder nicht vorhanden ist. Die Ladungen benehmen sich nicht wie zwei räumlich getrennte Körper, sondern wie ein Ganzes, mit nur einer Massenschwerpunkts-Position die nach außen hin ohne Ladungsgröße dasteht. Die Ladungen könnten damit auch in ihrer Ausdehnung beliebig klein sein. Versucht man eine Ladung mit einem ladungsverschränkten Neutron in einer Messung größenmäßig abzuschätzen, so wird das Elektron im Allgemeinen keine Verbindung mit dem Neutron eingehen und die Wirkungsquerschnitte können entsprechend sehr klein ausfallen.

Sind verschränkte Zustände zwischen Teilchen, tatsächlich zeit-und raumlos so lässt sich dies geometrisch nur mit Teilchen als Ebenen realisieren. Bei punktförmigen Teilchen hätten wir keinen Richtungsvektor und wir bräuchten eine eigenständige Raum-Zeitstruktur, was gerade durch die Verschränkung wieder offen ist. Aber auch sphärische Teilchen machen gerade wegen der Verschränkung keinen Sinn mehr, da wir dann am Anfang und am Ende eine kurze Phase einer Raumkrümmung erklären müssten. Wie können sich die Quanten von einer konvexen Ausgangskrümmung beim Startteilchen in eine konkave Endkrümmung beim Endteilchen verformen? Genau diese Schwierigkeiten würden bei festen Ebenen-Strukturen nicht auftreten. Eine Messung der Quanten aus unserer Weltsicht würde dann entsprechend die zu erwartenden ebene Wellen ergeben.